



۱) اگر $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$ و $g(x) = \sqrt{x-x^2}$ باشند. دامنه‌ی تعریف تابع $g \circ f$ ، کدام است؟

سراسری - ۱۳۹۶

- ۱) $[0, 1]$ ۲) $\{0\}$ ۳) $(-1, 1)$ ۴) $\mathbb{R} - \{1, -1\}$

۲) اگر $f(x) = \sqrt{3-x}$ و $g(x) = \log_2(x^2 + 2x)$ باشند، دامنه‌ی تعریف تابع $f \circ g$ ، کدام است؟

سراسری - ۱۳۹۴

- ۱) $[-4, 2]$ ۲) $[-2, 0]$ ۳) $[-4, -1] \cup (1, 2]$ ۴) $[-4, -2] \cup (0, 2]$

۳) اگر $f(2x-3) = 4x^2 - 14x + 13$ باشد، ضابطه‌ی $f(x)$ ، برابر کدام است؟ سراسری - ۱۳۹۷

- ۱) $x^2 - x + 3$ ۲) $x^2 - 2x - 1$ ۳) $x^2 - 2x + 1$ ۴) $x^2 - x + 1$

۴) اگر $f(x) = x^2 - x - 2$ و $f(g(x)) = x^2 + x - 2$ ، آن گاه $(f+g)(x)$ کدام گزینه می

تواند باشد؟ خارج از کشور - ۱۳۹۰

- ۱) $x^2 - 1$ ۲) $x^2 + 1$ ۳) $x^2 - 2x$ ۴) $x^2 + 2x$

۵) اگر $g(x) = 2x + 1$ و $(f \circ g)(x) = 8x^2 + 6x + 5$ باشند، تابع $f(x)$ برابر کدام است؟

خارج از کشور - ۱۳۹۵

- ۱) $2x^2 + 3x + 1$ ۲) $2x^2 - 2x + 3$ ۳) $2x^2 - x + 4$ ۴) $2x^2 + x + 3$

۶) اگر $f(x) = (2x-3)^2$ و $g(x) = x+2$ نمودارهای دو تابع f و $f \circ g$ ، با کدام طول متقاطع

اند؟ سراسری - ۱۳۹۲

- ۱) -1 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) 1 ۴) $\frac{3}{2}$



۷ در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = a \cdot b^x$; $b > 0$ داریم $f(0) = \frac{3}{2}$ و $f(-2) = \frac{3}{32}$ مقدار

سراسری-۱۳۹۱

$f(\frac{3}{2})$ کدام است؟

۲۴ ۴

۱۲ ۳

۸ ۲

۶ ۱

۸ اگر $f(x) = \frac{2x+3}{2-x}$ و $g(x) = \frac{1-3x}{x+2}$ باشند، ضابطه‌ی تابع $g(f(x))$ کدام است؟

خارج از کشور-۱۳۹۶

$x+1$ ۴

$-x-1$ ۳

$-x$ ۲

x ۱

۹ اگر $f(x) = 2x - [2x]$ و $g(x) = -x^2 + 4x$ باشند، بُرد تابع $g \circ f$ کدام است؟ $[\]$ ، نماد

سراسری-۱۳۹۹

جزء صحیح است)

$[1, 4)$ ۴

$[0, 4)$ ۳

$[0, 3)$ ۲

$[0, 2)$ ۱

۱۰ اگر f یک تابع خطی باشد به‌طوری که $f(x) + f(\frac{1}{x}) = \frac{x^2 - 12x + 1}{2x}$ مقدار $f(-4)$

سنجش-۱۳۹۴

کدام است؟

-5 ۴

-3 ۳

-1 ۲

1 ۱

۱۱ اگر $f = \{(2, 7), (3, 1), (1, 4), (0, 2)\}$ و $g = \{(3, 4), (0, 3), (4, 2), (1, 2)\}$ برد

سنجش-۱۳۹۴

تابع $f + g$ کدام است؟

$\{6, 5, 4\}$ ۴

$\{5, 6, 3\}$ ۳

$\{5, 6, 2\}$ ۲

$\{5, 6\}$ ۱

۱۲ تابع خطی $f(x)$ از دو نقطه‌ی $(3, 5)$ ، $(1, -3)$ می‌گذرد، $f(-2)$ کدام است؟

سنجش-۱۳۹۴

4 ۴

-11 ۳

7 ۲

-15 ۱



۱۳ در کره‌ای به شعاع ۳، استوانه قائمی با ارتفاع h محاط شده است. تابع حجم استوانه بر حسب h کدام است؟
قلم چی - ۱۳۹۸

$$V = \pi(9 - \frac{h}{4})h^2 \quad (4) \quad V = \pi(9 - \frac{h^2}{4})h \quad (3) \quad V = \pi(6 - h)h^2 \quad (2) \quad V = \pi(6 - h^2)h \quad (1)$$

۱۴ با ۱۲۰ متر نرده یک ناحیه از زمین را به شکل یک مثلث متساوی الساقین با قاعده a محصور کرده‌ایم. ضابطه تابعی که مساحت مثلث را بر حسب قاعده آن بیان می‌کند، کدام است؟
قلم چی - ۱۳۹۹

$$S(a) = \sqrt{900a^2 - 30a^3} \quad (2) \quad S(a) = \sqrt{900a^2 - 15a^3} \quad (1) \\ S(a) = \sqrt{900a^3 - 30a^2} \quad (4) \quad S(a) = \sqrt{900a^3 - 15a^2} \quad (3)$$

۱۵ اگر f تابع ثابت، g تابع همانی و $\frac{2f(3)}{5g(-1)} = 1$ باشد، آن‌گاه حاصل $f(2) \times g(2)$ کدام گزینه می‌باشد؟
قلم چی - ۱۳۹۹

$$-4 \quad (4) \quad 4 \quad (3) \quad -5 \quad (2) \quad 5 \quad (1)$$



پاسخنامه تشریحی

ابتدا دامنه‌ی تعریف دو تابع f, g را بدست می‌آوریم. ۱ ۲ ۳ ۴

$$f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2} \rightarrow D_f = R - \{-1, 1\}$$

$$g(x) = \sqrt{x-x^2} \rightarrow D_g : x-x^2 \geq 0 \rightarrow x(1-x) \geq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 0 \leq x \leq 1$$

$$D_{gof} = \{x \in D_f, f(x) \in D_g\} = \underbrace{\{x \neq 1, x \neq -1\}}_I, \quad 0 \leq \frac{1+x^2}{1-x^2} \leq 1$$

$$\frac{1+x^2}{1-x^2} \geq 0 \rightarrow 1-x^2 > 0 \rightarrow x^2 < 1 \rightarrow -1 < x < 1 \quad (II)$$

$$\frac{1+x^2}{1-x^2} \leq 1 \rightarrow \frac{1+x^2}{1-x^2} - 1 \leq 0 \rightarrow \frac{1+x^2-1+x^2}{1-x^2} \leq 0 \rightarrow \frac{2x^2}{1-x^2} \leq 0$$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
عبارت ≤ 0		-	ت	+	ت

$$\rightarrow x < -1 \quad \text{یا} \quad x > 1 \quad \text{یا} \quad x = 0 \quad (III)$$

از اشتراک I و II و III به جواب $x = 0$ می‌رسیم.

روش اول: ۱ ۲ ۳ ۴ ۲

ابتدا دامنه‌ی تعریف دو تابع f, g را به دست می‌آوریم:

$$D_f : 3-x \geq 0 \rightarrow x \leq 3$$

$$D_g : x^2 + 2x > 0 \rightarrow x(x+2) > 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} x < -2 \quad \text{یا} \quad x > 0$$

$$D_{fog} = \{x \in D_g, g(x) \in D_f\} = \{x < -2 \quad \text{یا} \quad x > 0, \log_{x^2+2x} \leq 3\}$$

$$= \{x < -2 \quad \text{یا} \quad x > 0, x^2 + 2x \leq 2^3\} = \{x < -2 \quad \text{یا} \quad x > 0, x^2 + 2x - 8 \leq 0\}$$

$$= \{x < -2 \quad \text{یا} \quad x > 0, (x+4)(x-2) \leq 0\} = \{x < -2 \quad \text{یا} \quad x > 0, -4 \leq x \leq 2\}$$

$$= -4 \leq x < -2 \quad \text{یا} \quad 0 < x \leq 2 \rightarrow [-4, -2) \cup (0, 2]$$

البته می‌توانیم $fog(x)$ را تشکیل داده (تابع را ساده نکنید) سپس دامنه‌ی آن را به دست آورید.

روش دوم:

$x = -1$ در دامنه‌ی تعریف g قرار ندارد بنابراین در دامنه‌ی تعریف fog هم نباید باشد یعنی هر گزینه‌ای که $x = -1$ دارد نادرست است. پس فقط گزینه‌ی چهارم درست است.

روش اول: ۱ ۲ ۳ ۴ ۳

$$2x - 3 = t \rightarrow 2x = t + 3 \rightarrow x = \frac{t+3}{2}$$

$$\text{پس: } f(t) = 4\left(\frac{t+3}{2}\right)^2 - 14\left(\frac{t+3}{2}\right) + 13 \rightarrow f(t) = (t+3)^2 - 7(t+3) + 13$$

$$\rightarrow f(t) = t^2 + 9 + 6t - 7t - 21 + 13 \rightarrow f(t) = t^2 - t + 1 \rightarrow f(x) = x^2 - x + 1$$

روش دوم: یک عدد دلخواه مانند $x = 2$ را انتخاب می‌کنیم.



$$f(2x-3) = 4x^2 - 14x + 13 \xrightarrow{x=1} f(1) = 16 - 14 + 13 \rightarrow f(1) = 1$$

تنها گزینه‌ی چهارم است که اگر به جای x آن عدد یک قرار دهیم حاصل برابر یک می‌شود.

۱ ۲ ۳ ۴ ۵

$$\begin{cases} f(x) = x^2 - x - 2 \Rightarrow f(g(x)) = (g(x))^2 - (g(x)) - 2 \\ f(g(x)) = x^2 + x - 2 \end{cases}$$

حال با تغییر متغیر $g(x) = t$ و تساوی دو رابطه‌ی بالا داریم:

$$\Rightarrow t^2 - t - 2 = x^2 + x - 2 \Rightarrow t^2 - t = x^2 + x$$

$$\Rightarrow (t - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} = (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} \rightarrow (t - \frac{1}{2})^2 = (x + \frac{1}{2})^2$$

$$\Rightarrow (t - \frac{1}{2}) = \pm(x + \frac{1}{2})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t - \frac{1}{2} = x + \frac{1}{2} \Rightarrow t = x + 1 \Rightarrow g(x) = x + 1 \\ t - \frac{1}{2} = -x - \frac{1}{2} \Rightarrow t = -x \Rightarrow g(x) = -x \end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} (f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 - x - 2 + (-x) = x^2 - 2x - 2 \\ (f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 - x - 2 + x + 1 = x^2 - 1 \end{cases}$$

روش اول: ۱ ۲ ۳ ۴ ۵

$$f \circ g(x) = 8x^2 + 6x + 5 \rightarrow f(g(x)) = 8x^2 + 6x + 5 \rightarrow f(2x+1) = 8x^2 + 6x + 5$$

برای پیدا کردن $f(x)$ باید $2x+1$ را مساوی t قرار دهیم.

$$2x+1=t \rightarrow 2x=t-1 \rightarrow x=\frac{t-1}{2}$$

$$\text{پس: } f(t) = 8\left(\frac{t-1}{2}\right)^2 + 6\left(\frac{t-1}{2}\right) + 5 \rightarrow f(t) = 8\left(\frac{t^2 + 1 - 2t}{4}\right) + 3(t-1) + 5$$

$$\rightarrow f(t) = 2t^2 + 2 - 4t + 3t - 3 + 5 \rightarrow f(t) = 2t^2 - t + 4$$

$$\rightarrow f(x) = 2x^2 - x + 4$$

روش دوم: $f(2x+1) = 8x^2 + 6x + 5$ است. به جای x یک عدد دلخواه مثلاً صفر قرار می‌دهیم:

$$x=0 \rightarrow f(1)=5$$

گزینه‌ای درست است که اگر در آن $x=1$ را قرار دهیم حاصل برابر ۵ شود که گزینه‌ی سوم است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = (2(x+2)-3)^2 = (2x+1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$$

$$f(x) = (2x-3)^2 \Rightarrow f(x) = 4x^2 - 12x + 9$$

$$\text{تلاقی: } 4x^2 + 4x + 1 = 4x^2 - 12x + 9 \Rightarrow 16x = 8 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

۷ ۱ ۲ ۳ ۴ در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = ab^x$ ، $f(0) = \frac{3}{2}$ و $f(-2) = \frac{3}{32}$ است، پس داریم:



$$f(\circ) = \frac{3}{2} \Rightarrow ab^{\circ} = \frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

$$f(-2) = \frac{3}{32} \Rightarrow \frac{3}{2} b^{-2} = \frac{3}{32} \Rightarrow \frac{1}{b^2} = \frac{1}{16} \Rightarrow b^2 = 16 \xrightarrow{b>0} b = 4$$

حال با معلوم بودن مقادیر a و b ، ضابطه‌ی تابع f را نوشته و سپس $f(\frac{3}{2})$ را به دست می‌آوریم:

$$a = \frac{3}{2}, b = 4 \Rightarrow f(x) = \frac{3}{2} \times 4^x \Rightarrow f(\frac{3}{2}) = \frac{3}{2} \times 4^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \sqrt{4^3} = \frac{3}{2} \times 8 = 12$$

روش اول: ۱ ۲ ۳ ۴ ۸

$$g(f(x)) = g\left(\frac{2x+3}{2-x}\right) = \frac{1-3\left(\frac{2x+3}{2-x}\right)}{\frac{2x+3}{2-x}+2} = \frac{2-x-6x-9}{2-x} = \frac{-7x-7}{2-x} = \frac{-7x-7}{2-x} = \frac{-7(-x-1)}{2-x} = -x-1$$

روش دوم:

یک عدد دلخواه مثلاً $x = 1$ را انتخاب می‌کنیم.

$$g(f(1)) = g(5) = \frac{1-15}{5+2} = \frac{-14}{7} = -2$$

فقط در گزینه‌ی سوم به ازای $x = -1$ عدد -2 به دست می‌آید.

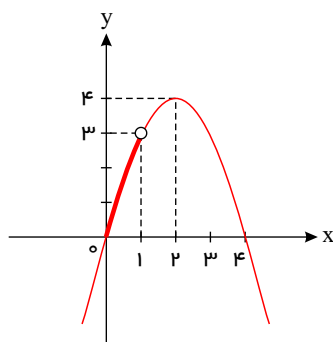
روش اول: ۱ ۲ ۳ ۴ ۹

می‌دانیم که $1 < u - [u] \leq 0$ است پس $1 < 2x - [2x] \leq 0$ است یعنی $0 \leq f(x) < 1$ است.

$$gof(x) = g(f(x)) = -f^2(x) + 4f(x) = -(f^2(x) - 4f(x)) = -((f(x) - 2)^2 - 4) = -(f(x) - 2)^2 + 4$$

$$0 \leq f(x) < 1 \rightarrow -2 \leq f(x) - 2 < -1 \rightarrow 1 < (f(x) - 2)^2 \leq 4 \rightarrow -1 > -(f(x) - 2)^2 \geq -4$$

$$\rightarrow 3 > -(f(x) - 2)^2 + 4 \geq 0 \rightarrow 0 \leq gof(x) < 3 \rightarrow R_{gof} = [0, 3)$$



روش دوم: در تابع $gof(x)$ ورودی تابع $2x - [2x]$ است که می‌دانیم $0 \leq 2x - [2x] < 1$ است کافی است

تابع $g(x)$ را رسم کرده و مشخص کنیم وقتی $0 \leq x < 1$ است چه عرضی به ما می‌دهد.

۱۰ ۱ ۲ ۳ ۴ تابع خطی به صورت $f(x) = ax + b$ نشان داده می‌شود.

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x^2 - 12x + 1}{2x} \rightarrow ax + b + \frac{a}{x} + b = \frac{ax^2 + bx + a + bx}{x} \\ = \frac{ax^2 + 2bx + a}{x} = \frac{2ax^2 + 4bx + 2a}{2x} = \frac{x^2 - 12x + 1}{2x} \xrightarrow{\text{مقایسه}} a = \frac{1}{2}, 4b = -12, b = -3$$

$$\text{بنابراین } f(x) = \frac{1}{2}x - 3 \rightarrow f(-4) = -2 - 3 = -5$$

$$f = \{(2, 7)(3, 1)(1, 4)(0, 2)\} \rightarrow f + g = \{(3, 5)(1, 6)(0, 5)\}$$

$$g = \{(3, 4)(0, 3)(4, 2)(1, 2)\}$$

برد تابع، مجموعه‌ی $\{5, 6\}$ است. دقت کنید زوج‌های مرتبی از دو تابع را در نظر بگیرید که دارای x های برابر باشند. سپس x های آن‌ها را نوشته و عرض‌های آن‌ها را باهم جمع می‌کنیم.

۱۲) تابع خطی به صورت $f(x) = ax + b$ نشان داده می‌شود این دو نقطه را در تابع صدق می‌دهیم. ۱ ۲ ۳ ۴

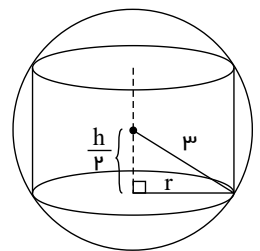
$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \xrightarrow{\text{صدق}} -3 = a + b \\ 3 \xrightarrow{\text{صدق}} 5 = 3a + b \end{array} \right\} \Rightarrow a = 4, b = -7$$

بنابراین: $f(x) = 4x - 7 \rightarrow f(2) = 8 - 7 = 1$

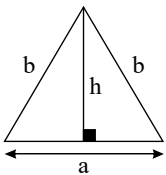
۱۳) اگر شعاع قاعده استوانه را r در نظر بگیریم، داریم: ۱ ۲ ۳ ۴

$$\left(\frac{h}{2}\right)^2 + r^2 = 3^2 \Rightarrow \frac{1}{4}h^2 + r^2 = 9 \Rightarrow r^2 = 9 - \frac{1}{4}h^2$$

$$V = \pi r^2 h = \pi \left(9 - \frac{1}{4}h^2\right)h$$



۱۴) طبق شکل داریم: $a + 2b = 120$ ، بنابراین: $b = 60 - \frac{a}{2}$ ۱ ۲ ۳ ۴



از طرفی طبق رابطه فیثاغورس داریم:

$$h^2 + \frac{a^2}{4} = b^2 \Rightarrow h^2 + \frac{a^2}{4} = \left(60 - \frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow h = \sqrt{\left(60 - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{3600 + \frac{a^2}{4} - 60a - \frac{a^2}{4}}$$

$$\rightarrow h = \sqrt{3600 - 60a}$$

پس اندازه مساحت مثلث برابر است با:

$$S = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}a\sqrt{3600 - 60a} = \frac{1}{2}a\sqrt{4(900 - 15a)} = \frac{1}{2}a \times 2\sqrt{900 - 15a} = \sqrt{900a^2 - 15a^3}$$

۱۵) ضابطه تابع همانی به صورت $g(x) = x$ و ضابطه تابع ثابت به صورت $f(x) = k$ است. ۱ ۲ ۳ ۴

چون g تابع همانی است، پس $g(-1) = -1$ و $g(2) = 2$ است، لذا داریم:

$$\frac{2f(3)}{5g(-1)} = 1 \Rightarrow \frac{2f(3)}{-5} = 1 \Rightarrow f(3) = -\frac{5}{2}$$

f تابعی ثابت است، پس $f(3) = f(2) = -\frac{5}{2}$ و لذا داریم:

$$f(2) \times g(2) = -\frac{5}{2} \times 2 = -5$$

پاسخنامه کلیدی

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴

۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴

۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴

۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴